**AVERTISSEMENT**

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants. Le barème adopté suivra sensiblement la proportion suivante : 13 points pour le problème I et 7 points pour le problème II.

**PROBLÈME I**

**$r$ est un paramètre réel non nul.**

- Dans toute la suite du problème $f_r$ désigne la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
  $f_r(0) = f_r(-1) = 0$
  et, pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, par : $f_r(x) = x\left|1 + 1/x\right|^r$
- $(C_r)$ désignera la représentation graphique de $f_r$ dans un repère orthonormé.

1°) Faire l'étude de $f_r$ et tracer la représentation graphique dans le cas $r = 1$.

**Désormais $r$ sera différent de 1 (et de 0).**

2°) Étude en 0.

a) $f_r$ a-t-elle une limite en 0 ?

b) Pour quelles valeurs de $r$, $f_r$ est-elle continue en 0 ?

c) Pour quelles valeurs de $r$, $f_r$ est-elle dérivable en 0 ?

3°) Étude en $-1$.

a) $f_r$ a-t-elle une limite en $-1$ ?

b) Pour quelles valeurs de $r$, $f_r$ est-elle continue en $-1$ ?

c) Pour quelles valeurs de $r$, $f_r$ est-elle dérivable en $-1$ ?

4°) Étude en $+\infty$ ou $-\infty$.

a) Écrire un développement limité à l'ordre 2, selon l'infiniment petit $1/x$, de la fonction $(1 + 1/x)^r$.

b) En déduire une expression de $f_r(x)$ sous la forme :

$f_r(x) = a_r x + b_r + e_r(x)$ où $a_r$ et $b_r$ désignent deux réels et $e_r$ une fonction qui tend vers zéro quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

c) En déduire que, quel que soit $r$, $(C_r)$ admet une asymptote oblique, dont on donnera l'équation et dont on précisera la position relative par rapport à $(C_r)$.

5°) Montrer que $f_r$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0 ; -1\}$ et que, sur cet ensemble, $f'_r(x)$ s'écrit :

$$f'_r(x) = \frac{x + 1 - r}{x}\ \Theta(x)\left|1 + 1/x\right|^{r-1}$$

ou $\Theta$ est une fonction égale à $+1$ ou $-1$, que l'on précisera selon les valeurs de $x$.

6°) Dresser le tableau de variation de $f_r$ et tracer la représentation graphique $(C_r)$ correspondante, dans les cas :

a) $r = -1$

b) $r = 1/2$

c) $r = 2$

7°) On considère l'intégrale doublement impropre :

$$I(r) = \int_0^{-1} x\left|1 + 1/x\right|^r dx$$

Montrer qu'elle est convergente si et seulement si :

$-1 < r < 2$

8°) On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^3)^n}$ pour $n$ entier strictement positif

a) Justifier l'existence de $J_n$ et, en intégrant par parties, chercher une relation de récurrence entre $J_n$ et $J_{n-1}$

b) En déduire $J_3$.

c) Calculer $I(-1/2)$ en effectuant le changement de variable : $\left|1 + 1/x\right|^{-1/2} = u$

**PROBLÈME II**

E désigne un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des réels, rapporté à une base $B = (e_1, e_2, e_3)$.
$a$ désigne un réel non nul et $h$, l'endomorphisme de E, dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

1°) Montrer que A admet 2 valeurs propres distinctes, $\alpha$ et $\beta$, indépendantes de $a$. On notera $\alpha$ la plus petite des valeurs propres.

2°) Montrer qu'il existe un vecteur propre $f_1$, associé à la valeur propre $\beta$, de la forme :
$f_1 = ue_1 + ve_2 + e_3$
pour deux réels $u$ et $v$ que l'on précisera.

3°) Montrer que, pour la valeur propre $\alpha$, il existe deux vecteurs propres,
l'un s'écrivant : $f_2 = u'e_1 + e_2$
l'autre s'écrivant : $f_3 = u''e_2 + e_3$
pour des réels $u'$ et $u''$ que l'on déterminera.

4°) a) Montrer rapidement que $(f_1, f_2, f_3)$ forme une base B' de E.

b) Quelle est la matrice D de $h$, dans la base B' ?

c) Déterminer $e_1$, $e_2$, $e_3$ en fonction de $f_1$, $f_2$, $f_3$.

5°) Calculer pour $n \in \mathbb{Z}$, $D^n$.

6°) En déduire, pour $n \in \mathbb{Z}$, $A^n$.
La méthode est laissée au choix du candidat qui pourra, s'il le désire, calculer $h^n(e_1)$..... à l'aide de 4°c) et 5°.

La réponse sera donnée clairement en écrivant
**très lisiblement, très proprement, et sans ratures,**
les 9 éléments de la matrice $A^n$.